Quand on veut résoudre un SEL

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

, en fait, on est en train de trouver ce qu'il faut donner comme input à la boîte noire pour obtenir $b_1 = 5$ et $b_2 = 2$

§ 4. Espaces vectoriels

Déf. 4.2 Un espace vectoriel est un ensemble V muni de deux opérations

somme

multiplication par scalaires

$$(v, w) \longmapsto \underbrace{v+w}_{}$$

pour $v, w \in V$

un nouveau élément dans V appelé "somme de v et w"

$$(\lambda, v) \longmapsto \underbrace{\lambda . v}_{}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in V$

nouveau él. de V appelé "multiplication de λ et v"

satisfaisant aux propriétés suivantes :

(EV.1) $v + w = w + v$

(EV.2) $u + (v+w) = (u+v)+w$

(EV.3) $\exists$ un élément $\boxed{0_V \in V}$ tel que $v + 0_V = v$ pour tout $v \in V$

on l'appelle vecteur nul

(EV.4) $\forall v \in V$, $\exists$ un élément "$\underbrace{-v}$" dans V tel que $v + (-v) = 0_V$

vecteur opposé de v

(EV.5) $\lambda . (u+v) = \lambda . u + \lambda . v$

(EV.6) $(\lambda + \mu) . v = \lambda . v + \mu . v$

(EV.7) $(\lambda . \mu) . v = \lambda . (\mu . v)$

(EV.8) $1 . v = v$

(pour tous $u, v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Désormais : vecteur = élément d'un espace vectoriel

Exemple

- $V = \mathbb{R}^n$ avec les opérations

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel. (preuve en détail dans le poly).

→ exercice (E.V. 2) Démontrer pour

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$u + (v+w) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{déf de} \\ v+w}}{=} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ \vdots \\ v_n+w_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{déf de} \\ u+(v+w)}}{=} \begin{pmatrix} u_1+(v_1+w_1) \\ \vdots \\ u_n+(v_n+w_n) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ass. de } + \\ \text{dans } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} (u_1+v_1)+w_1 \\ \vdots \\ (u_n+v_n)+w_n \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{déf de } (u+v)+w \\ \downarrow}}{=} \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{déf de } u+v}{=} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \square$$

Exemple • Déf (rappel) Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

où $\underbrace{a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}}$ ← coefficients de p.

et $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Si $a_n \neq 0$, on dit que $\underbrace{\deg(f) = n}_{\text{degré de } f}$.

et $\deg(\mathbb{O}) = -\infty$

↳ polynôme nul i.e $\mathbb{O} = 0 + 0 \cdot x + 0x^2 + \dots$

$\mathbb{P} := \{ p \text{ polynôme à coefficients dans } \mathbb{R} \}$

$\mathbb{P}_n := \{ p \in \mathbb{P} \ : \ \deg(p) \leq n \}$

On muni $\mathbb{P}$ avec

- $(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)$
  $:= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) . x^n$

- $\lambda . (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) := (\lambda . a_0) + (\lambda . a_1) x + \dots + (\lambda . a_n) x^n$

Exercice $\mathbb{P}$ avec $+$ et $\cdot$ précédents est un espace vectoriel (exo 1, (b), série 3)

- $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{1,1} & \cdots & \lambda \cdot a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ muni de $+$ et $\cdot$ précédents est un espace vectoriel

(exercice)

Déf. 4.20 Soit V un espace vectoriel avec somme $+$ et multiplication par scalaires $\cdot$.

Une partie (= sous-ensemble) $W \subseteq V$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel}}$ si

(SEV.1) $0_V \in W$ (SEV.2) $w + \lambda w' \in W$ pour tous $w, w' \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prop. 4.22 Si $W \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel de V, alors W est un espace vectoriel avec la somme et la multiplication par scalaires de V restreintes à des éléments de W.

(preuve dans le poly).

Exemple 4.24 $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P}$ est un sous-esp. vectoriel.

pol. de deg $\leq n$

(à faire mtn)

(SEV.1)

$$\deg(0) = \deg(0 + 0x + 0x^2 \dots) = -\infty \leq n$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \in \mathbb{P}_n$$

(SEV.2)

$$a = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$
$$b = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$$

$\deg(\,) \leq n$

$$\Rightarrow a + \lambda b = (a_n + \lambda b_n)x^n + \dots + (a_0 + \lambda b_0) \quad \text{a } \deg \leq n \checkmark$$

En particulier $\mathbb{P}_n$ est un esp. vect. avec la somme et multiplication précédentes.

De même que pour vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

Déf. 4.15 | Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ où V est un espace vectoriel avec somme $+$ et multiplication $\cdot$.

Une combinaison linéaire (C.L) de $\mathcal{F}$ est un élément de V de la forme

$$\lambda_1 . v_1 + \dots + \lambda_p . v_p$$

coeff. de la C.L

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{F}$ est liée dans V s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que

$$\lambda_1 . v_1 + \dots + \lambda_p . v_p = 0_V$$

On dit que $\mathcal{F}$ est libre si elle n'est liée.

Déf. 4.27 Soit $\mathcal{F} \subseteq V$ une partie dans un espace vectoriel V (avec somme $+$ et multiplication $\cdot$). On définit la partie engendrée par $\mathcal{F}$ (ou sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$) comme

$$\operatorname{Vect}\mathcal{F} := \{\text{toutes les C.L de } \mathcal{F}\}$$

De façon explicite, si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$, alors

$$\operatorname{Vect}\mathcal{F} = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

Lemme 4.28 $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de V, pour toute famille $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \in V$!

$\boxed{\text{Exemple } 4.29^*}$ On pose $V = \mathbb{P}$.

On pose $\mathcal{F} = \left\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 \right\}$

Calculer $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$ ⟵ et trouver qq'un déjà connu !!